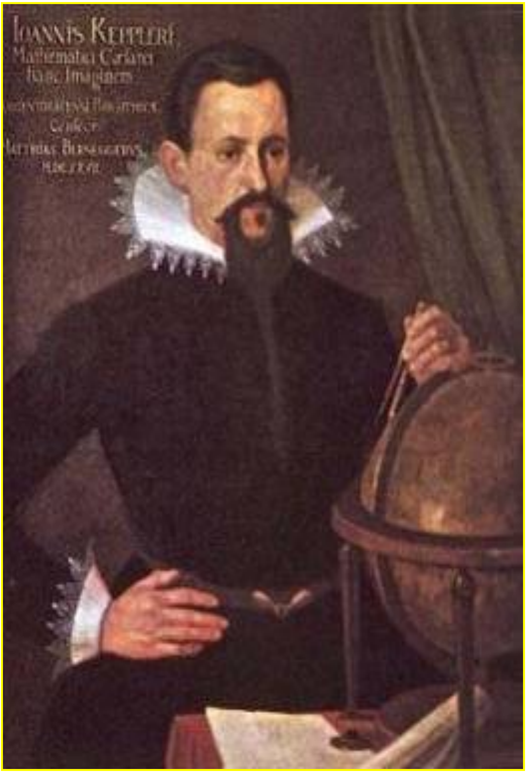
Leggi di Keplero e Gravitazione

Olimpiadi di Astronomia 2016

Selezione Interregionale Lazio

astrolimpiadi.lazio@iaps.inaf.it

Giovanni Keplero
(1571-1630)



Fu un convinto protestante, debole di costituzione e spesso malato soffriva di una forte miopia congenita.

Vissuto all'epoca della "Guerra dei Trent'Anni" la sua vita quotidiana fu molto difficile e fu spesso perseguitato per motivi religiosi. Tra il 1617 e il 1620 dovette difendere la madre dall'accusa di stregoneria.

Aveva una famiglia numerosa (frutto di due matrimoni) ma riusciva con difficoltà a riscuotere lo stipendio.

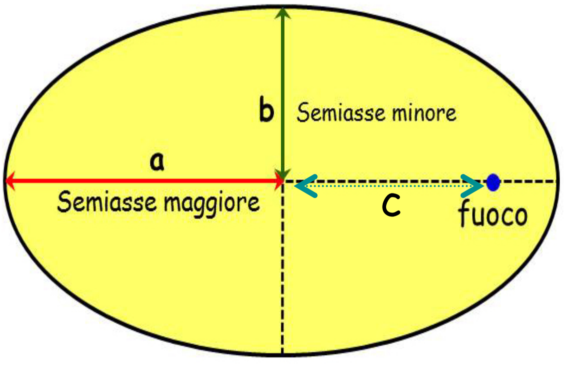
Morì mentre cercava di ottenere direttamente dall'Imperatore Ferdinando II i 10.000 fiorini (il suo stipendio annuo era di 1000 fiorini) che gli erano dovuti.

Keplero credeva nel sistema copernicano con un trasporto quasi religioso e rifiutò una chiamata all'Università di Bologna quando seppe da Galileo come era considerato in Italia tale sistema.

La sua grande e unica fortuna fu quella di essere stato nominato assistente del celebre astronomo Tycho Brahe a Praga nel 1600. Brahe morì improvvisamente poco dopo e Keplero prese il suo posto ereditando l'enorme mole di dati osservativi ottenuti in anni di lavoro dal vecchio maestro.

Le Leggi di Keplero

Come Copernico e Galileo anche Keplero riteneva che le orbite dei pianeti fossero circolari; solo successivamente, per far coincidere i calcoli con le osservazioni di Brahe, prese in considerazione anche altre figure geometriche.



Individuò che la forma corretta delle orbite planetarie è l'ellisse, che descrisse come "un cerchio allungato"; inoltre si rese conto che il Sole non sta al centro, ma in uno dei due "fuochi".

Capì infine che il moto di rivoluzione non avviene a velocità costante, ma che i pianeti si muovono più rapidamente quando sono più vicini al Sole.

Caratteristiche delle ellissi:

a = semiasse maggiore; ***b*** = semiasse minore; ***e*** = eccentricità

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (eq.1)$$

Equazione dell'ellisse con centro nell'origine degli assi cartesiani:

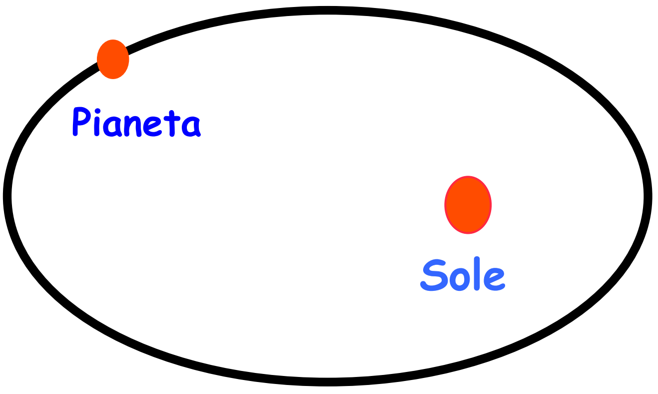
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (eq.2)$$

Coordinate cartesiane dei fuochi: $(-c,0),(c,0)$;
dal teorema di Pitagora si ottiene che: $c^2=a^2-b^2$ *(eq.3)*
Mettendo, poi, insieme l' *eq.1* e l' eq.*3* otteniamo che:

$$e = \frac{c}{a} \quad (eq.4)$$

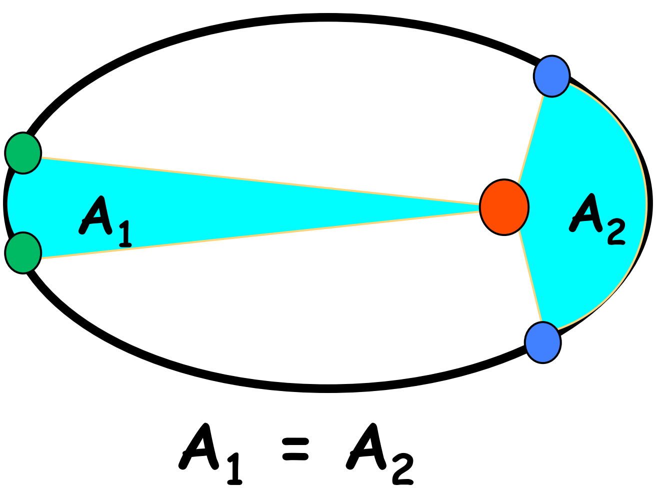
Mentre l'area di un'ellisse è data da: $A = \pi a \cdot b \quad (eq.5)$

Keplero pubblicò le prime due leggi nel 1609 ("Astronomia nova")



1° Legge: le orbite dei pianeti sono ellissi, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi

Le orbite dei pianeti sono in realtà simili a circonferenze (eccentricità della Terra = 0.02); le eccentricità maggiori si osservano per gli asteroidi e per le comete



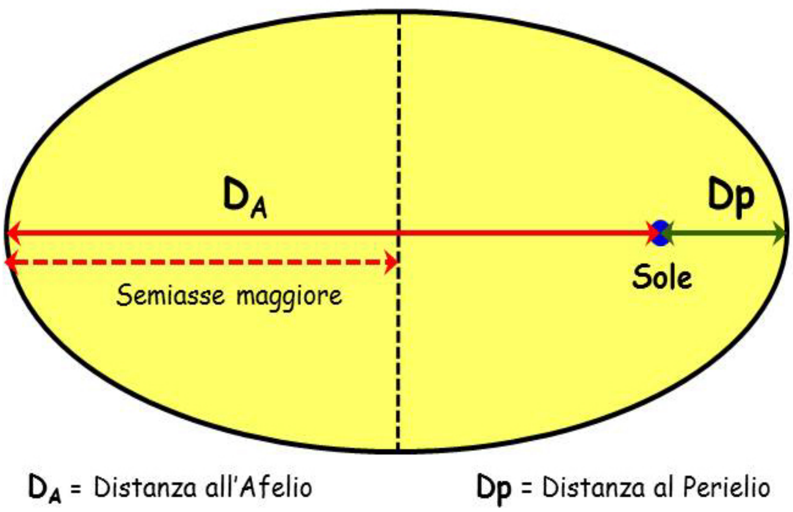
2° Legge: il raggio vettore che unisce un pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali

Conseguenza: La velocità di un pianeta è maggiore al perielio e minore all'afelio

Due delle concezioni "arcaiche" dell'Astronomia, moti circolari e velocità uniformi, venivano infine rimosse.

Nota: queste due leggi derivano, rispettivamente, dalle leggi di conservazione della **quantità di moto** e del **momento della quantità di moto**

Orbite planetarie: definizioni e proprietà



Afelio: distanza massima di un corpo del Sistema Solare dal Sole.

Perielio: distanza minima di un corpo del Sistema Solare dal Sole

(per i corpi in orbita intorno alla Terra useremo i corrispondenti termini Apogeo e Perigeo).

$$\mathbf{D_P = a\,(1\text{-}e); \qquad D_A = a\,(1+e); \qquad a = (D_A + D_P)\,/2}$$

Indicando con V_A la velocità di un corpo all'Afelio e con V_P la velocità del corpo al Perielio, dalla seconda legge di Keplero ricaviamo la relazione: $\mathbf{V_A\, D_A = V_P\, D_P}$

Nota 1: dalla legge di conservazione del momento della quantità di moto sappiamo che il prodotto vettoriale **V** x **D** = V · D · sin α = costante; dove V e D sono i moduli dei vettori **V** e **D** e **a** è l'angolo formato dai due vettori. In generale vale la relazione: $V_1 \cdot D_1 \cdot \sin\boldsymbol{\alpha}_1 = V_2 \cdot D_2 \cdot \sin\boldsymbol{\alpha}_2$ e poiché sia al perielio che all'afelio α= 90 ricaviamo $V_A\, D_A = V_P\, D_P$

Nota 2: Si definisce Unità Astronomica (**UA**) il semiasse maggiore dell'orbita della Terra, il cui valore è di: **149.6 · 10⁶ km**

Sicuro dell'esistenza di un'armonia nell'Universo, Keplero cercò di trovare una regolarità tra le distanze dei pianeti dal Sole (a) e i periodi di rivoluzione (T). L'armonia fu trovata e consiste nella proporzione tra il semiasse maggiore ed il periodo di rivoluzione:

$$\mathbf{a^3 / T^2 = costante = K \quad (eq.6)}$$

3° Legge: il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo del suo semiasse maggiore. Ne segue che: maggiore è la distanza di un pianeta dal Sole tanto più tempo esso impiega a compiere una rivoluzione. La legge non dice quale sia il valore della costante K. Ma conoscendo il periodo e il semiasse maggiore dell'orbita di un qualsiasi pianeta, si può, per esempio, calcolare il periodo orbitale di tutti gli altri pianeti nota la loro distanza dal Sole. Dati due corpi qualsiasi in orbita intorno al Sole, dalla terza legge si puo anche scrivere:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$$

La terza legge fornisce un modello in scala del Sistema Solare: nota una qualsiasi distanza si possono ricavare tutte le altre.

Il valore della costante è in realtà:

$$\frac{G(M_{Sole} + M_{pianeta})}{4\pi^2} \quad (eq.7)$$

Dove G è la costante gravitazionale Universale: $G=6.67\ 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-1}$

Poichè la massa del Sole è molto maggiore di quella di qualsiasi dei pianeti del sistema solare il valore della costante si può approssimare a:

$$K = \frac{G(M_{Sole})}{4\pi^2} \quad (eq.8)$$

ed è quindi la stessa per tutti i pianeti del sistema solare.

Nel caso di corpi con massa non molto diversa tra loro, la terza legge di Keplero va utilizzata nella cosiddetta forma generalizzata:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M + m\ )}{4\pi^2} \quad (eq.9)$$

Esprimendo la distanza dal Sole in UA e il periodo in anni per un qualsiasi corpo del Sistema Solare si ha K=1 e quindi l'eq. 6 diventa:

$$a^3=T^2$$

Leggi della meccanica

1 - **Legge d'inerzia**: un corpo non soggetto a forze o sta fermo o si muove di moto rettilineo uniforme (se la forza applicata ad un corpo (**F**) è uguale a 0 anche l'accelerazione (**a**) del corpo sarà nulla. Ovvero: **F** = 0, **a** = 0

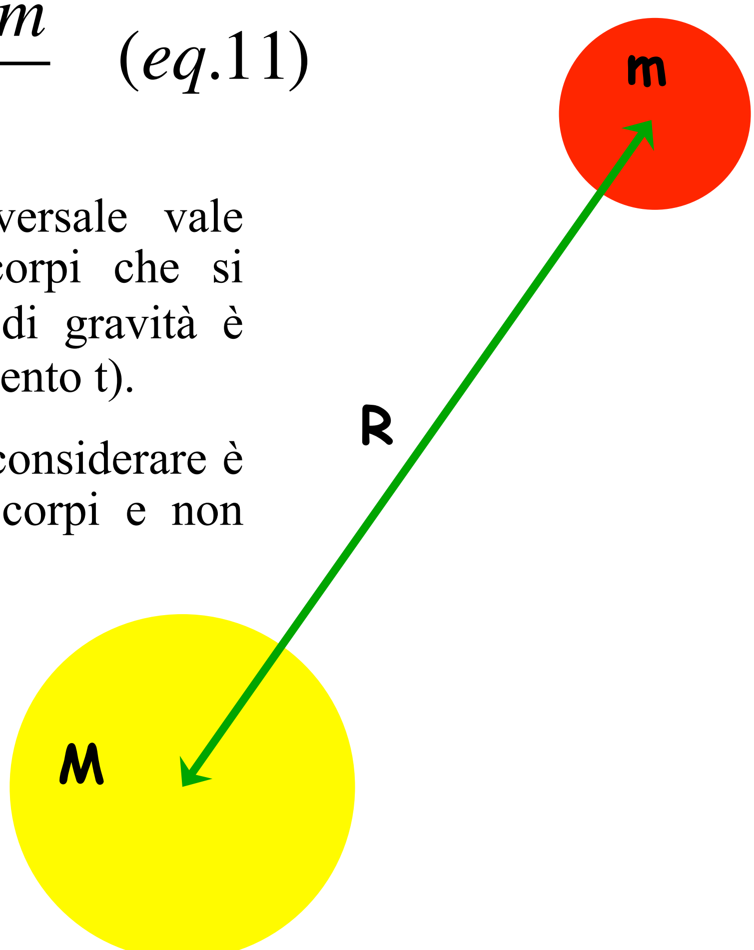
2 – Se ad un corpo è applicata una forza **F** esso subirà un'accelerazione **a** proporzionale alla forza applicata. La costante di proporzionalità è la sua massa

$$\boldsymbol{F = m \cdot a} \quad \textit{\textbf{(eq.10)}}$$

3 – Principio di azione e reazione: ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria

Legge di Gravitazione Universale

$$F = G\frac{M \cdot m}{R^2} \quad (eq.11)$$



La legge di gravitazione universale vale qualunque sia la natura dei corpi che si considerano; inoltre la forza di gravità è "istantanea" (cioè valida al momento t).

Attenzione: La distanza (R) da considerare è quella tra i baricentri dei due corpi e non quella tra le loro superfici.

Altre relazioni

Moto rettilineo uniforme
v (velocità lineare) **= s / t** [m/s] (s = spazio, t = tempo)

Moto rettilineo uniformemente accelerato:
v = a t [m/s] (a = accelerazione [m/s^2]); **s = ½ a t²** [m]

Moto circolare uniforme
ω (velocità angolare) **= 2 π / T** [radianti/s = s^{-1} poiché il radiante è un numero puro] (T = periodo del moto [s])

v (velocità tangenziale) **= ω r** [m/s] (r = raggio della circonferenza)

$\mathbf{a_c}$ (accelerazione centrifuga) = $\boldsymbol{\omega^2 r = v^2 / r}$ [m/s^2]

Accelerazione di gravità
è l'accelerazione a cui è soggetto un corpo di massa ''m'' a causa della forza di gravitazione esercitata su di esso da un corpo di massa ''M''.
Mettendo insieme l'eq.10 e l'eq.11 si ha la relazione:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad a_g = G \cdot \frac{M}{R^2} \qquad (eq.12)$$

(per ogni corpo a distanza R dal centro di un corpo di massa M)

Prima Velocità Cosmica e Velocità di fuga

Si definisce prima velocità cosmica (**v_1**) la velocità che un corpo (di massa trascurabile) deve possedere per entrare in orbita circolare attorno a un corpo celeste di massa ‘’M’’ a una distanza (R) dal suo centro. Ciò accade quando la forza centrifuga è bilanciata dall'attrazione gravitazionale :

$$\frac{1}{2} M v_1^2 = G \frac{Mm}{R^2} \qquad\qquad v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (eq.13)$$

Si definisce velocità di fuga (**v_f**), o seconda velocità cosmica, la velocità minima necessaria per fuggire dalla forza gravitazionale partendo dalla superficie, **senza ulteriore propulsione** (ad esempio un proiettile) e senza considerare altri fattori come l’attrito:

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = v_1 \sqrt{2} (eq.14)$$

Nel caso della Terra **v_{1T}** = 7.90 km/s e **v_{fT}** = 11.17 km/s. Un razzo che si allontana dalla Terra non ha bisogno di raggiungere la velocità di fuga, ma può allontanarsi anche a velocità molto minori se dotato di un adeguato sistema di propulsione.

Un corpo può entrare in orbita a una distanza ‘r’ solo se la sua velocità (v) è compresa nell’intervallo: **$v_{1T} \leq v \leq v_{fT}$.** Se **$v < v_{1T}$** il corpo ricade sulla Terra con moto parabolico; se **$v = v_{1T}$** entra in orbita circolare; se **$v_{1T} \leq v \leq v_{fT}$** descrive orbite ellittiche.

Attenzione: all’interno di una navicella in orbita circolare intorno alla Terra l’accelerazione di gravità è quasi nulla (microgravità) non perché l’accelerazione di gravità della Terra è nulla, ma perché la forza centrifuga bilancia l'attrazione gravitazionale.

Moto con accelerazione variabile

La relazione **v = a t** si può applicare solo nei casi in cui l'accelerazione non varia in modo significativo lungo il percorso del corpo in moto, per esempio nella caduta libera di un grave da un'altezza molto minore del raggio di un pianeta.

Nel caso di caduta di un corpo di piccola massa da una distanza molto grande, tale cioè da non poter considerare costante l'accelerazione di gravità, una soluzione approssimata per il tempo di caduta (t) può essere ricavata dalla terza legge di Keplero, considerando la traiettoria come un'ellisse estremamente schiacciata (e ≈ 1) con il corpo di massa maggiore in uno dei fuochi.

Detta ''d'' la distanza di partenza del corpo, ''a'' il semiasse maggiore dell'ellisse e ''T'' il periodo di rivoluzione si avrà:

$$a = \frac{d}{2};\ \text{e} \quad t = \frac{T}{2}$$

Ricavando T dalla terza legge di Keplero avremo:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Rightarrow \text{se } a = \frac{d}{2};\ \text{e} \quad t = \frac{T}{2}$$ Si avrà sostituendo:

$$t = \sqrt{\frac{\pi^2 d^3}{8GM}} \quad (eq15)$$

Se invece è noto il tempo di caduta si può ricavare la distanza di partenza:

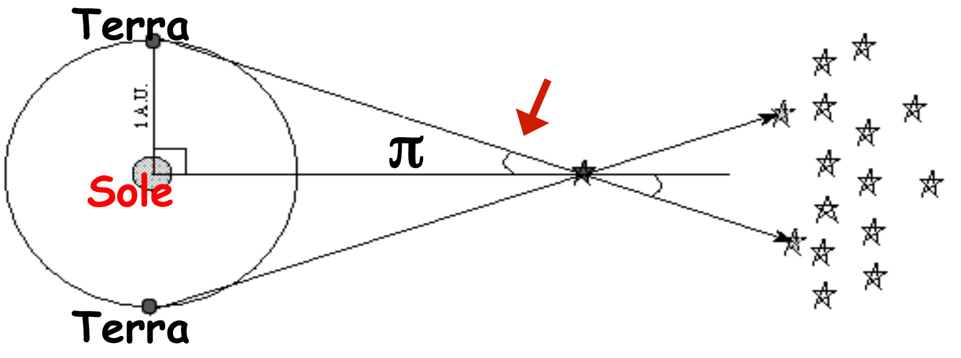
$$d = \sqrt[3]{\frac{8GMt^2}{\pi^2}} \quad (eq16)$$

La Parallasse Annua

La parallasse è lo spostamento apparente di un oggetto rispetto allo spostamento reale dell'osservatore. Si misura in unità di secondo d'arco.

Prendendo in considerazione un astro, si noterà che riosservandolo dopo sei mesi apparirà sotto un diverso angolo, dovuto al fatto che la Terra in sei mesi si è spostata.

Si definisce Parallasse Annua di una stella (e si esprime con il simbolo **π**) la metà del suo spostamento apparente in un anno causato dal moto della Terra intorno al Sole. Le stelle sono pressochè fisse e la Terra si sposta intorno al Sole. Poiché la distanza Terra-Sole è molto piccola rispetto alla distanza delle stelle anche l'angolo **π** è molto piccolo e risulta **sempre minore di 1"** (1" = 1°/3600).



Solo nel 1838 F.W. Bessel (1784-1846) fu in grado di misurare la prima parallasse stellare: 61 Cygni mostra una parallasse di 0.293", un angolo che equivale alle dimensioni apparenti di una moneta da 1 € vista da una distanza di 16 km.

Un Parsec (pc): è la distanza dalla quale 1UA sottende un angolo di 1"

Anno Luce: è la distanza che la luce percorre in un anno

1 pc = $3 \cdot 10^{13}$ km = **206265 UA**
1 anno luce = $9460 \cdot 10^{9}$ km = **63235 UA**
1 pc = 3.26 anni luce